note 11 ①

— Consensus n-Tree — T. Margush & F.R. McMorris [1981]

Bull. Math. Biol. 43 : 239-244

S : a set of n-taxa　　　{a, b, c} を abc とかく。

$P(S)$: the set of all subsets of S

Ex 1) $n=5$ ならば $S = 12345$

$P(S) = \{\phi$, 1, 2, ..., 5, — one-taxon component

12, 23, ..., 45, — 2-taxon 〃

123, 234, ..., 345, — 3 taxon 〃

1234, ..., 2345, — 4 taxon 〃

$12345\}$ — 5-taxon ($\equiv S$)

Def. 1 : — n-Tree —

an n-Tree (T) : a subset of $P(S)$

conditions 1. $S \in T$, $\phi \notin T$

2. $\forall i \in S$, $i \in T$

3. $\forall A, B \in P(S)$, $A \cap B \neq \phi$;

$A, B \in T \Rightarrow A \subseteq B$ or $A \supseteq B$

Def. 2 : — Relation $\leqq$ — 　　A B $\Longleftrightarrow A < B$

$A \leqq B \Longleftrightarrow A, B \in T$, $B \subseteq A$

△ $A \leqq B$ ならば component A, B は compatible 且つ inclusive の関係にある。

note : $A < B \Longleftrightarrow A, B \in T$, $B \subset A$

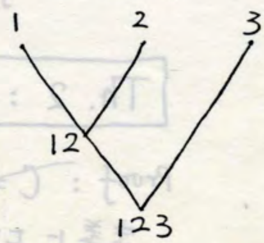
Ex 2) $n = 3$ (3-taxon cladogram)　　n-tree T

$S = 123$

$P(S) = \{\phi, 1, 2, 3, 12, 23, 13, 123\}$

⇓

$T = \{1, 2, 3, 12, 123\}$



このとき n-tree T は 右のように図示される。

Def. 3 : — Consensus n-Tree $M(C)$ —

$C = \{T_1, T_2, \cdots, T_m\}$: a set of n-trees

majority rule of C ; $M(C)$: a subset of $P(S) \ni A$

$$A \in M(C) \iff \text{more than half of } T_i\text{'s},\ A \in T_i$$

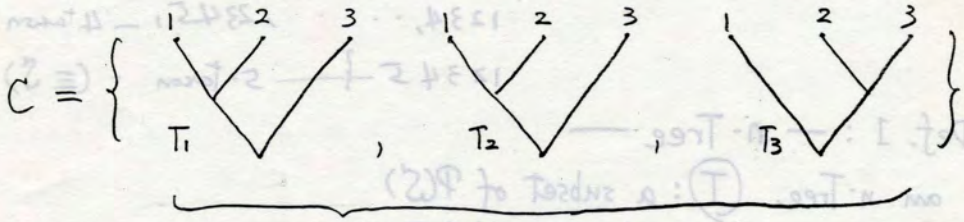
Ex. 3) $T_1 = \{1, 2, 3, 12, 123\}$

$T_2 = \{1, 2, 3, 12, 123\}$

$T_3 = \{1, 2, 3, 23, 123\}$

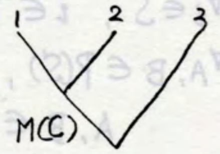
3-taxon problem

(T_3 : incongruent pattern)



$M(C) = \{1, 2, 3, 12, 123\}$

$\boxed{\text{Th. 1 } C = \{\text{n-trees}\} \Downarrow M(C) : \text{an n-tree}}$



Def. 4 : — Difference Metric $d(T_1, T_2)$ —

$d(T_1, T_2)$ = no. of the components ~~incompatible~~ disagreeing between T_1 & T_2

Ex. 4) T_1, T_2, T_3 above

$$d(T_1, T_2) = 0, \quad d(T_1, T_3) = d(T_2, T_3) = 2$$

$\because T_1 = \{1, 2, 3, \boxed{12}, \boxed{\ }, 123\}$

$\quad T_3 = \{1, 2, 3, \boxed{\ }, \boxed{23}, 123\}$

symmetric differences

Def. 5 : — Median $m(C)$ —

a median for C, $m(C) \Longrightarrow \min \sum_{T \in C} d(m(C), T)$

$$\boxed{\text{Th. 2 : } M(C) = m(C)}$$

~~Proof : $C = \{T_1, T_2, \cdots, T_m\}$~~

~~定義により 1, 2, …, n と 123…n (=S) は $^\forall T_i$ に共通である。また~~

~~これらは $^\forall x \in t_i$ と compatible である。~~

それ故、それらは $d(T_i, T_j)$ とは無関係である。つまり、

$$t_i = T_i - \{1, 2, \cdots, n, S\}$$

とおくと、次式が成り立つ。

$$d(T_i, T_j) = d(t_i, t_j) \quad (i, j = 1, 2, \cdots, m)$$

ここで

$$T_i = \{1, 2, \cdots, n, \; C_{21}, C_{22}, \cdots C_{2k_2}, \; C_{31}, C_{32}, \cdots C_{3k_2}, \; \cdots, \; C_{n-1,1}, C_{n-1,2} \cdots C_{n-1,k_{n-1}}, S\}$$

ここで $C_{i\cdot}$: i-taxon component $(1 < i < n)$

$$\therefore t_i = \{C_{21}, \cdots ; C_{31}, \cdots ; \cdots ; C_{n-1,1} \cdots\cdots\}$$

$d(T_i, T_j)$ の値は T_i, T_j の ~~incompatible~~ disagreeing components の個数によって定まる。

$$T_1 = \{1, 2, 3, 12, 123\}$$
$$T_2 = \{1, 2, 3, 12, 123\}$$
$$T_3 = \{1, 2, 3, 23, 123\}$$
$$T_1 \cup T_2 \cup T_3 = \{1, 2, 3, 12, 23, 123\}$$

$\bigcup_i T_i$ の要素を $C_1, C_2, \cdots, C_\ell$ とする。その C_k が存在すれば 1、存在しなければ 0 と記す。C_k の T_i に於ける値を x_{ik} とすると、

	1_{C_1}	2_{C_2}	3_{C_3}	12_{C_4}	23_{C_5}	123_{C_6}
T_1	1	1	1	1	0	1
T_2	1	1	1	1	0	1
T_3	1	1	1	0	1	1

$$d(T_i, T_j) = \sum_{k=1}^{\ell} |x_{ik} - x_{jk}|$$

$C = \{T_1, T_2, \cdots, T_m\}$ の median $m(C)$ の components のスコアを $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\ell$ とすると、

$$d(m(C), T_i) = \sum_{k=1}^{\ell} |\alpha_k - x_{ik}|$$

$$D = \sum_{i=1}^{m} d(m(C), T_i) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{\ell} |\alpha_k - x_{ik}|\right) = \sum_{k=1}^{\ell}\left(\sum_{i=1}^{m} |\alpha_k - x_{ik}|\right)$$

Dを最小にするには、k-th component c_k ごとのスコア $\sum_{i=1}^{m}|\alpha_k - x_{ik}|$ を最小にすればよい。

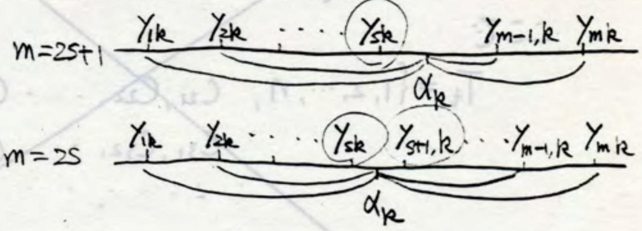
Generally $x_{1k}, x_{2k}, \cdots, x_{mk}$ を大小の順に並べ、次のようにする。

$$y_{1k} \le y_{2k} \le \cdots \le y_{mk}$$

このとき、明らかに

$$\sum_{i=1}^{m}|\alpha_k - x_{ik}| = \sum_{i=1}^{m}|\alpha_k - y_{ik}|$$

が成立する。



1) $m=2s+1$（奇数）

$y_{s-1,k} \le \alpha_k \le y_{s+1,k}$ である限り、あらゆる α_k の値に対し

$$|\alpha_k - y_{1k}| + |\alpha_k - y_{mk}| = \text{const}$$
$$|\alpha_k - y_{2k}| + |\alpha_k - y_{m-1,k}| = \text{const}$$
$$\cdots\cdots$$
$$|\alpha_k - y_{s-1,k}| + |\alpha_k - y_{s+1,k}| = \text{const}$$

であるから、

$$\sum_{i=1}^{m}|\alpha_k - y_{ik}| = |\alpha_k - y_{sk}| + \text{const.} \quad (y_{s-1,k} \le \alpha_k \le y_{s+1,k})$$

よって、$\alpha_k = y_{sk}$ (median) のとき、上式は最小の値をとる。

2) $m=2s$（偶数）

上と同じく、$y_{sk} \le \alpha_k \le y_{s+1,k}$ である限り、

$$|\alpha_k - y_{1k}| + |\alpha_k - y_{mk}| = \text{const}$$
$$|\alpha_k - y_{2k}| + |\alpha_k - y_{m-1,k}| = \text{const.}$$
$$\cdots\cdots$$
$$|\alpha_k - y_{sk}| + |\alpha_k - y_{s+1,k}| = \text{const}$$

であるから、

$$\sum_{i=1}^{m}|\alpha_k - y_{ik}| = \text{const} \quad (y_{sk} \le \alpha_k \le y_{s+1,k})$$

よって $\alpha_k = y_{sk}$ 或は $y_{s+1,k}$ のとき、上式は最小の値をとる。

y_{ik} が binary であるとすると、(median の値 $m=2s+1$ ならば y_{sk}, $m=2s$ ならば y_{sk} と $y_{s+1,k}$) が 0 か 1 かによって、0, 1 のどちらが多いかがわかる。

結局、$m(C)$ の components は、過半数の n-trees で存在するもののみから成る。それ故 $m(C) = M(C)$ である。 Q.E.D.

Ex. 5)　3-taxon

$T_1 = \{1, 2, 3, 12, 123\}$

$T_2 = \{1, 2, 3, 12, 123\}$

$T_3 = \{1, 2, 3, 23, 123\}$

$\underbrace{\therefore T_1 \cup T_2 \cup T_3 = \{1, 2, 3, 12, 23, 123\}}$

	1	2	3	12	23	123
T_1	1	1	1	1	0	1
T_2	1	1	1	1	0	1
T_3	1	1	1	0	1	1
$m(C)$	1	1	1	1	0	1
$M(C)$	1	1	1	1	0	1

$\therefore m(C) = M(C) = \{1, 2, 3, 12, 123\}$

Ex. 6)　10-taxon

$T_1 = \{1, 2, \cdots, 10, 12, 345, 12345, 123456, 78, 9\cdot10, 12\cdots8, S\}$

$T_2 = \{1, 2, \cdots, 10, 12, 34, 345, 3456, 123456, 89\cdot10, 789\cdot10, S\}$

$T_3 = \{1, 2, \cdots, 10, 123, 1234, 56, 123456, 78, 789, 789\cdot10, S\}$

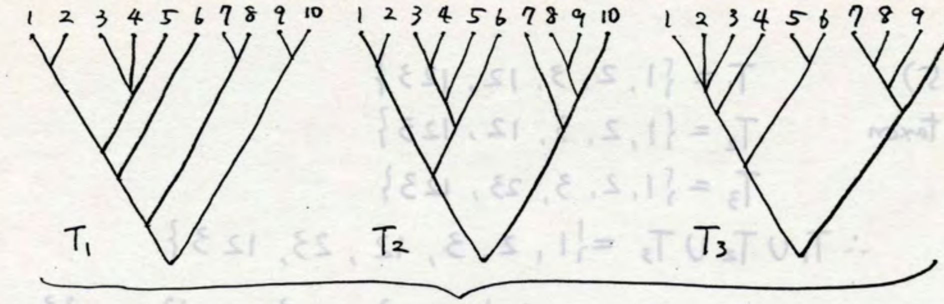
$\therefore T_1 \cup T_2 \cup T_3 = \{1, 2, 3, \cdots, 10, 12, 34, 56, 78, 9\cdot10, 123, 345, 789, 89\cdot10, 1234, 3456, 789\cdot10, 12345, 123456, 12\cdots8, S\}$

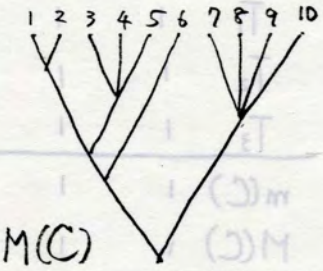
	$\underbrace{1, 2, \cdots, 10, S}$	12	34	56	78	9·10	123	345	789	89·10
T_1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0
T_2	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1
T_3	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
$m(C)=M(C)$	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0

	1234	3456	789·10	12345	123456	12⋯8
T_1	0	0	0	1	1	1
T_2	0	1	1	0	1	0
T_3	1	0	1	0	1	0
$m(C)=M(C)$	0	0	1	0	1	0

$\therefore m(C) = M(C) = \{1, 2, \cdots, 10, 12, 78, 345, 789{\cdot}10, 123456, S\}$

cladogram で示すと

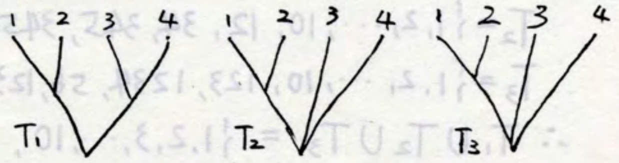




$m(C) = M(C)$

つまり、majority rule $M(C)$ は距離 D を最小にする median $m(C)$ に等しいのである。けれども、この majority rule では character-set に含まれる有益な情報が無視される場合があり得る。以下では、その一つの例をあげる。

Ex. 7) 4-taxon problem



$T_1 = \{1, 2, 3, 4, 12, 34, 1234\}$

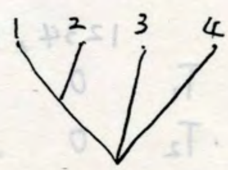
$T_2 = \{1, 2, 3, 4, 12, 1234\}$

$T_3 = \{1, 2, 3, 4, 12, 1234$

$T_1 \cup T_2 \cup T_3 = \{1, 2, 3, 4, 12, 34, 1234\}$

	1	2	3	4	12	34	1234
T_1	1	1	1	1	1	1	1
T_2	1	1	1	1	1	0	1
T_3	1	1	1	1	1	0	1
$\therefore M(C)$	1	1	1	1	1	0	1

M(C)



右図の通り $M(C)$ では component 34 が不採用になってしまう。ところが、実際には、34 は他の全ての components と combinable であるから、何らかの

方法でそれは生かされなければならない筈である。

つまり、Majority Rule は「厳しすぎる」のである。 1983. 10. 5.

— Faithful Consensus Methods for n-Trees —

D. A. Neumann [1983] Math. Biosci 63:271-287

S : a set of n taxa $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$

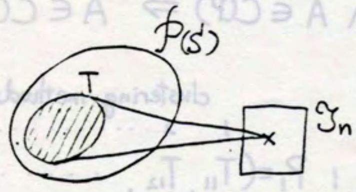
$\mathcal{P}(S)$: the set of all subsets of S

$\cup$

T : a n-tree

$\mathcal{T}_n$: the set of all n-trees on S

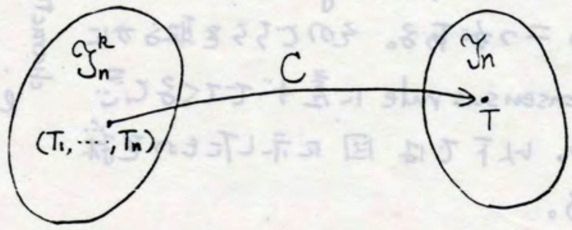
$\mathcal{T}_n^k = \{(T_1, T_2, \cdots, T_k) \mid \forall i,\ T_i \in \mathcal{T}_n\}$



Consensus Rule C

$$\begin{array}{ccc} C: \mathcal{T}_n^k & \longrightarrow & \mathcal{T}_n \\ \Psi & & \Psi \\ P & & T \\ \parallel & & \\ (T_1, T_2, \cdots, T_k) & & \end{array}$$

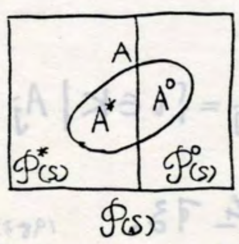
"profile"



$C(\mathcal{P}) = T$: a consensus n-tree

$S, \phi, t_1, t_2, \cdots, t_n$: trivial subsets $\mathcal{P}^\circ(S)$ $(\because \forall T \in \mathcal{T}_n,\ \mathcal{P}^\circ(S) \subseteq T)$

$\mathcal{P}^*(S)$: nontrivial subsets ("clusters"), $\mathcal{P}^*(S) = \mathcal{P}(S) - \mathcal{P}^\circ(S)$



$A \subseteq \mathcal{P}(S)$

$A^* = A \cap \mathcal{P}^*(S)$

$A^\circ = A \cap \mathcal{P}^\circ(S)$

$\therefore C(P) \subset \mathcal{P}(S)$

$C^*(P) = C(P) \cap \mathcal{P}^*(S) = C(P) - \mathcal{P}^\circ(S)$

1983. 10. 6.

$K=\{1,2,\cdots,k\}$

< Neutrality Axiom >

consensus rule C が "neutral" と定義されるのは、

$$P, P' \in \mathcal{T}_n^k,\ A, B \in \mathcal{P}^*(S),\ i \in K$$

$$\{i \mid A \in T_i\} = \{i \mid B \in T_i'\} \wedge A \in C(P) \Rightarrow B \in C(P')$$

< Monotonicity Axiom >

consensus rule C が "monotone" と定義されるのは、

$$P, P' \in \mathcal{T}_n^k,\ A \in \mathcal{P}^*(S),\ i \in K$$

$$\{i \mid A \in T_i\} \subseteq \{i \mid A \in T_i'\} \wedge A \in C(P) \Rightarrow A \in C(P')$$

右の縦軸と横軸は交換可能である。つまり、consensus rule には character sets に関するもので clustering methods に関するものの二つがある。そのどちらを取るかにより consensus rule に差がでてくると思われる。以下では図に示したものを採用する。

clustering methods

character sets	1	2	⋯	k
1 $P_1=($	$T_{11},$	$T_{12},$	⋯	$T_{1k})$
2 $P_2=($	$T_{21},$	$T_{22},$	⋯	$T_{2k})$
⋮		⋮		
l $P_l=($	$T_{l1},$	$T_{l2},$	⋯	$T_{lk})$

上の二公理を満たす consensus rule を "MN-rule" と呼び、次のように定式化される。

$\mathfrak{D}$: a decisive family

$\cup\!\!\!\mid$

D : a decisive subset $(D \subseteq K)$

$$\forall P \in \mathcal{T}_n^k,\ \exists \mathfrak{D},\ \forall D \in \mathfrak{D},\ \exists A \in C(P),\ A \in C(P) \Leftrightarrow \forall i \in D,\ A \in T_i$$

つまり

$$\begin{array}{ccccc} C(P) = \{A_1, & A_2, & \cdots, & A_m\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathfrak{D} = \{D_1, & D_2, & \cdots, & D_m\} \end{array} \qquad D_j = \{i \in K \mid A_j \in T_i\}$$

C が MN-rule であるならば、この $\mathfrak{D}$ が存在する。 1983. 10. 7.

Proof) ~~N公理は $\exists P \in \mathcal{T}_n^k$ に対し、"$A \in \mathcal{P}^*(S)$ が $C(P)$ に属するような $D_A \subseteq K$ があるならば、~~ ~~その D_A に等しい集合をもつ他の component も~~

どれ以外の profile に対して

~~また consensus tree に属するという内容であり、M公理では、あるPに対し、$A \in C(P)$ であるような $D_A \subseteq K$ があるとすると、$P' (\neq P)$ に対して $D'_A \supseteq D_A$ ならば $A \in C(P')$ であると主張している。つまり、ここでいう consensus rule (MN-rule) とは、~~

$$A \in C(P) \iff \forall i \in D_A \quad A \in T_i$$

~~を意味しているのである。「何故なら、N公理で A=B とすると~~

$$D_A = D'_A \wedge A \in C(P) \Rightarrow A \in C(P')$$

~~となり、Aの C(P) への帰属は D_A のみによって判定される。~~

$$\triangle \quad A \in C(P) \Rightarrow \forall i \in D_A,\ A \in T_i \text{」}$$

~~何故なら、M公理から、$P, P' \in \mathcal{G}_n^k$ に対し、$D_A = D'_A$ ならば、~~

$$D_A \subseteq D'_A \wedge A \in C(P) \Rightarrow A \in C(P')$$

$$D'_A \subseteq D_A \wedge A \in C(P') \Rightarrow A \in C(P)$$

~~が同時に成立するから、$D_A = D'_A$ である限り、$A \in C(P) \iff A \in C(P')$ となる。また、N公理から、異なる $A, B \in \mathcal{S}^*(S)$、異なる $P, P' \in \mathcal{G}_n^k$ に対して、$D_A = D_B$ でありさえすれば consensus tree に帰属できる。以上より Aの C(P) への帰属は そのPに対してある D_A が存在しさえすればよい。~~

$$\begin{tikzcd}
\text{N公理:}\ P = (T_1, T_2, \cdots, T_k) \arrow[r, "C"] \arrow[d, Rightarrow] & C(P) \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \\
D_A = \{i \mid A \in T_i\} \arrow[d, phantom, "\parallel"] & A \\
D'_B = \{i \mid B \in T'_i\} & B \arrow[d, phantom, "\rotatebox{-90}{$\in$}"] \\
P' = (T'_1, T'_2, \cdots, T'_k) \arrow[r, "C"] \arrow[u, Rightarrow] & C(P')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\text{M公理:}\ P = (T_1, T_2, \cdots, T_k) \arrow[r, "C"] \arrow[d, Rightarrow] & C(P) \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \\
D_A = \{i \mid A \in T_i\} \arrow[d, phantom, "\rotatebox{-90}{$\subseteq$}"] & A \\
D'_A = \{i \mid A \in T'_i\} & A \arrow[d, phantom, "\rotatebox{-90}{$\in$}"] \\
P' = (T'_1, T'_2, \cdots, T'_k) \arrow[r, "C"] \arrow[u, Rightarrow] & C(P')
\end{tikzcd}$$

異なるPに対し

Consensus Tree への帰属は 異なる A, B に対しては $D_A = D'_B$ (N公理)
同じ A に対しては $D_A \subseteq D'_A$ (M公理) による。どちらの場合にしろ、C(P) への帰属は、そのcomponent A に対応する D_A のみに依存する。また

このことは、C(P)に属する全てのcomponentに対していえるから、consensus rule Cに対応するdecisive family $\mathcal{D}=\{D\}$が存在する。Q.E.D

N公理とM公理の妥当性について

The axioms of neutrality and monotonicity appear to be quite natural properties that one might expect to require of any possible consensus function with little property. (p. 274)

N公理の妥当性：i番目のclustering methodがあるPに対するT_iを作ったのだから、Pに対してある$A \in T_i$ $(i \in D_A)$が$A \in C(P)$であるならば、$\forall i \in D_A$、i-th clustering methodが他のP'に対して作った$B \in T_i'$ $(i \in D_B' = D_A)$は$B \in C(P')$が期待される。

M公理の妥当性：Pに対して$A \in T_i$ $(i \in D_A)$が$A \in C(P)$だったのだから、その同じAが他のP'に対し$A \in T_i'$ $(i \in D_A')$だったてすると、$D_A \subseteq D_A'$のとき$A \in C(P')$が期待される。

Nevertheless, as the preceding characterization shows, there is at least one drawback of MN-rules in that *no information is retained* in the consensus, except when a given cluster is repeated (exactly) in sufficiently many of the individual clusterings. (p. 274)

この欠点は具体的なCの定式化に依って明らかになるが、既に⑥〜⑦で見たように、MN ruleの代表例であるmajority ruleが示しているように、|D|がかなり大きくないと"consensus"とはいえないから、少数頻度であらわれるcomponentsの情報が無視される危険性がある。

1983. 10. 8.

<Betweenness Axiom>

consensus rule Cが"faithful"と定義されるのは、

$$\forall P \in \mathcal{T}_n^k,\ \forall X_i \in T_i (i \in K),\ \exists B \in C(P)$$

$$\bigcap_{i=1}^{k} X_i \subseteq B \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} X_i$$

<Pareto Axiom>

consensus rule Cが"Pareto"と定義されるのは、

$$\exists P \in \mathcal{T}_n^k.\ \forall i \in K.\ A \in T_i\ ;\ A \in C(P)$$

$C : \mathfrak{T}_n^k \to \mathfrak{T}_n$ がB公理を満たせば、それはP公理をも満たす。

Proof) $^\exists P \in \mathfrak{T}_n^k$, $^\forall i \in K$, $A \in T_i$ とする。CがB公理を満たしているから、

$$^\forall i \in K,\ X_i \equiv A \text{ ——— } *$$

とするならば、$^\exists B \in C(P)$ に対し $\cap X_i \subseteq B \subseteq \cup X_i$ が成り立つ。ここで $*$ を用いれば

$$\underset{\substack{\parallel \\ A}}{\cap X_i} \subseteq B \subseteq \underset{\substack{\parallel \\ A}}{\cup X_i} \qquad \therefore A \subseteq B \subseteq A \quad \text{つまり } A = B \in C(P)$$

すなわち、B公理が成立すれば、P公理 $(A \in C(P))$ も成り立つ。Q.E.D.

1983.10.11.

1983. 12. 21. ①

the consensus tree of Adams (1972) : an example

$T_1 = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 10, 12, 345, 12345, 123456, 78, 9\cdot10, 12\cdots8, S\}$

$T_2 = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 10, 12, 34, 345, 3456, 123456, 89\cdot10, 789\cdot10, S\}$

$T_3 = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 10, 123, 1234, 56, 123456, 78, 789, 789\cdot10, S\}$

① $CT = \{\phi\}$

$\left[P_i = \bigcup_{x\in S} \{A_x^i \mid A_x^i \in T_i \text{ and } A_x^i \text{ is the maximal element of } T_i \text{ containing } x \in S \right]$

$\forall x \in S,\ A_x^i = S \quad (i = 1.2.3)$

$\therefore P_1 = P_2 = P_3 = \{S\}$

$\left[P = \bigcup_{x\in S} \bigcap_{i=1}^{m} A_x^i ,\quad CT = CT \cup P \right]$

$\therefore P = \{S\},\ CT = \{S\}$

$\left[T_i = T_i - \overbrace{\left(\bigcup_{A\in P} \{A_j^i \in T_i \mid A \subseteq A_j^i\} \right)}^{D_i} \right]$

$P = \{S\}$ より $S = A \therefore D_i = \bigcup_{A\in P} \{A_j^i \in T_i \mid A \subseteq A_j^i\} = \{S\}$

$\therefore T_1 = \{1, 2, \cdots, 10, 12, 345, 12345, 123456, 78, 9\cdot10, 12\cdots8\}$

$T_2 = \{1, 2, \cdots, 10, 12, 34, 345, 3456, 123456, 89\cdot10, 789\cdot10\}$

$T_3 = \{1, 2, \cdots, 10, 123, 1234, 56, 123456, 78, 789, 789\cdot10\}$

② $CT = \{S\}$

$P_1 = \{12345678, 9\cdot10\}$

$\because x = 1, 2, \cdots, 8$ のとき $A_x^1 = 12345678$; $x = 9, 10$ のとき $A_x^1 = 9\cdot10$

$P_2 = \{123456, 789\cdot10\}$

$P_3 = \{123456, 789\cdot10\}$

$\therefore P = \{123456, 78, 9\ 10\}$

$P = \bigcup_{x\in\{1,2,3,4,5,6\}} (12\cdots8 \cap 12\cdots6 \cap 12\cdots6)\ \cdot$

$\bigcup_{x\in\{7,8\}} (12\cdots8 \cap 7\cdot8\cdot9\cdot10 \cap 789\cdot10)\ \cdot$

$\bigcup_{x\in\{9,10\}} (9\cdot10 \cap 789\cdot10 \cap 789\cdot10)$

$= \{123456, 78, 9\cdot10\}$

$CT = \{S\} \cup P = \{123456, 78, 9\cdot10, S\}$

$P = \{123456, 78, 9\cdot10\}$ より

$D_1 = \bigcup_{A \in P} \{A_j^1 \in T_1 \mid A \subseteq A_j^1\} = \{123456, 12345678, 78, 9\cdot10, S\}$

$\therefore T_1 = T_1 - \{123456, 78, 9\cdot10, S\}$

$= \{1, 2, \cdots, 10, 12, 345, 12345\}$

$T_2 = \{1, 2, \cdots, 10, 12, 34, 345, 3456\}$

$T_3 = \{1, 2, \cdots, 10, 123, 1234, 56\}$

③ $CT = \{123456, 78, 9\cdot10, S\}$

$P_1 = \{12345, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$x = 1, 2, 3, 4, 5$ のとき $A_x^1 = 12345$, $x \in \{6, 7, \cdots, 10\}$ のとき $A_x^1 = x$

$P_2 = \{12, 3456, 7, 8, 9, 10\}$

$P_3 = \{1234, 56, 7, 8, 9, 10\}$

$\therefore P = \{12, 34, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$CT = \{123456, 78, 9\cdot10, S\} \cup P$

$= \{12, 34, 78, 9\cdot10, 123456, 5, 6, \cdots, 10, S\}$

$D_1 = \bigcup_{A \in P} \{A_j^i \in T_1 \mid A \subseteq A_j^1\} = \{12, 34, 345, 3456, 789\cdot10, 89, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 89\cdot10, S\}$

$\therefore T_1 = \{1, 2, 3, 4\}$

$\therefore T_2 = \{1, 2, 3, 4\}$

$\therefore T_3 = \{1, 2, 3, 4\}$

④ $CT = \{12, 34, 78, 9\cdot10, 123456, 5, 6, \cdots, 10, S\}$

$P_1 = \{1, 2, 3, 4\} = P_2 = P_3$

$\therefore P = \{1, 2, 3, 4\}$

$CT = \{12, 34, 78, 9\cdot10, 123456, 5, 6 \cdots 10, S\} \cup P$

$CT = \{1, 2, \cdots, 10, 12, 34, 78, 9\cdot10, 123456, S\}$

$D_1 = \bigcup_{A \in P} \{A_j^1 \in T_1 \mid A \subseteq A_j^1\} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\therefore T_1 = T_1 - D_1 = \{\phi\}$, $T_2 = T_3 = \{\phi\}$ — STOP —