生物統計学

― データに基づく「よりよい推論」のために ―

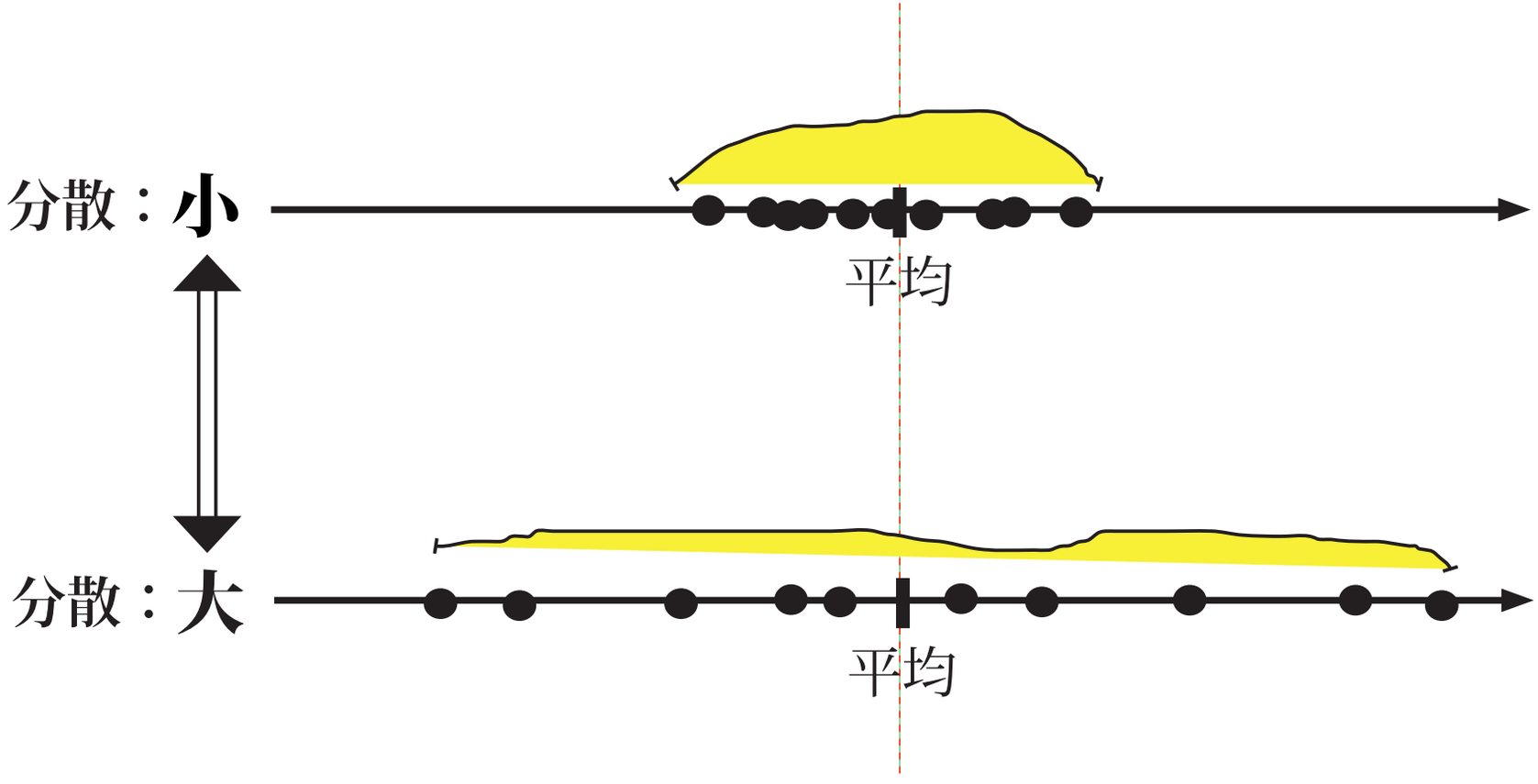
三中 信宏
MINAKA Nobuhiro

独立行政法人 農業環境技術研究所 生態系計測研究領域 上席研究員
東京大学大学院 農学生命科学研究科 生物・環境工学専攻 教授［生態系計測学］
東京農業大学大学院 農学研究科 客員教授［応用昆虫学］

minaka@affrc.go.jp（メール）
http://twitter.com/leeswijzer（ツイッター）
http://cse.niaes.affrc.go.jp/minaka/（ウェブサイト）
http://d.hatena.ne.jp/leeswijzer/（書評ブログ）

2015 年度・東京大学第 4 学期・理学部専門科目（木曜第 5 限）
三中信宏〈生物統計学〉：2015 年 9 月～ 2015 年 12 月
東京大学駒場キャンパス 5 号館 522 番教室

「分散」のイメージは……



「分散」を数字で表すには……

→「平均値」からの差をとる

○単純な引き算をする

データ：x_1, x_2, x_3 →平均：$\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$

偏差

$$x_1 - \overline{x}$$
$$x_2 - \overline{x}$$
$$x_3 - \overline{x}$$

「偏差」を集計するには？

「偏差」の正負にかかわらず，

その大きさだけを集計する

・案１：「絶対値」を集計――

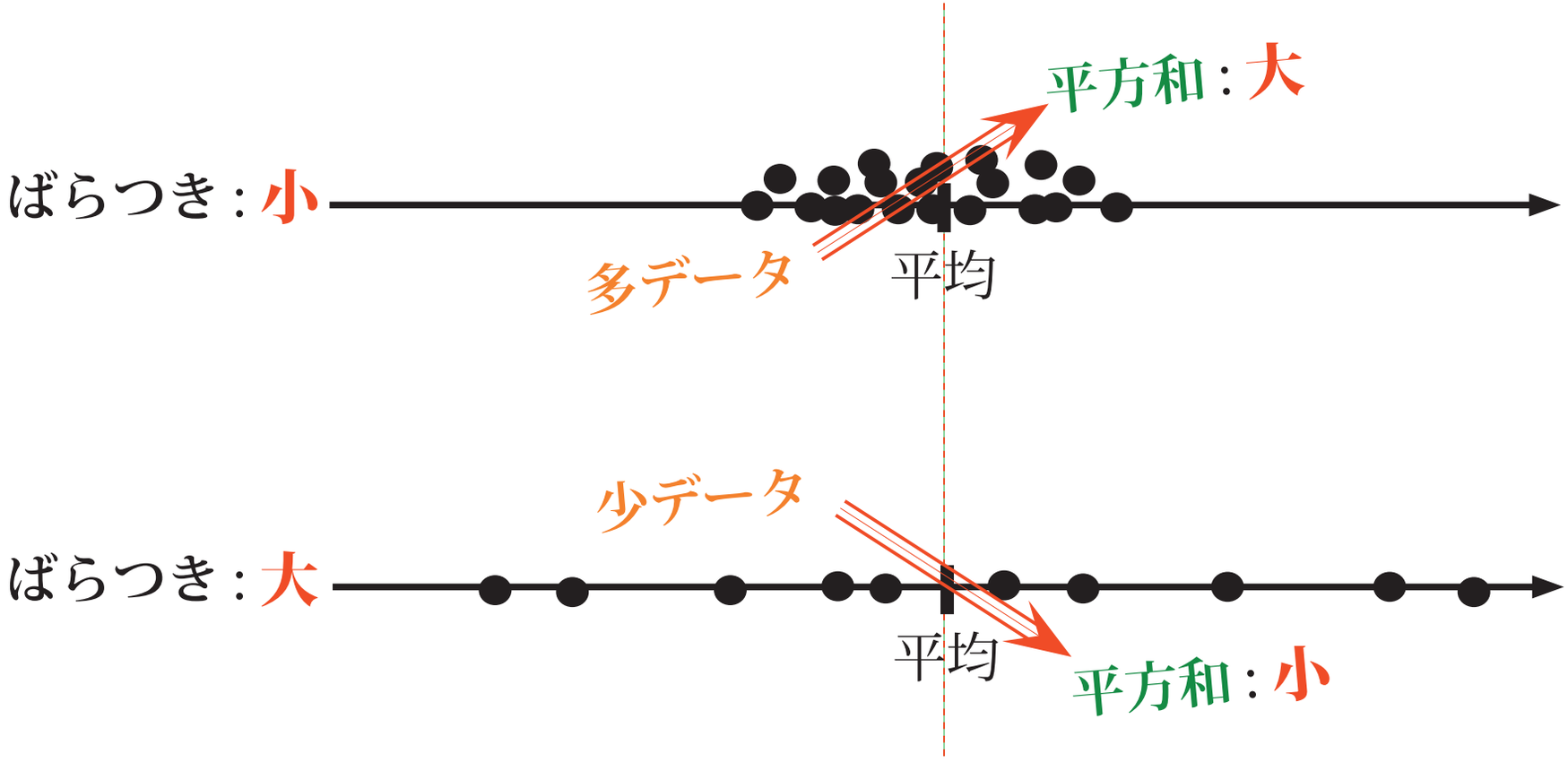
$$|x_1 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + |x_3 - \overline{x}|$$

・案２：「平方値」を集計――

$$(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + (x_3 - \overline{x})^2$$

平方和

でも「平方和」ではまだ不十分……



→ データの「サイズ」で補正しよう

「平方和」をサイズ補正するには……

・案１：「データ数」で割り算してはどうか――

✕ 平方和 / データ数

・案２：「自由度」で割り算するべきだ――

○ 平方和 / 自由度

……「自由度」って何？

「自由度」とは何か？

３つの偏差の間には.

$$(x_1 - \overline{x}) + (x_2 - \overline{x}) + (x_3 - \overline{x}) = 0$$

という制約があるので，その自由度は「3」ではない.

実際は，３偏差のうちのいずれかひとつは，他の２偏差によって完全に決定されるので：

$$(x_3 - \overline{x}) = -(x_1 - \overline{x}) - (x_2 - \overline{x})$$

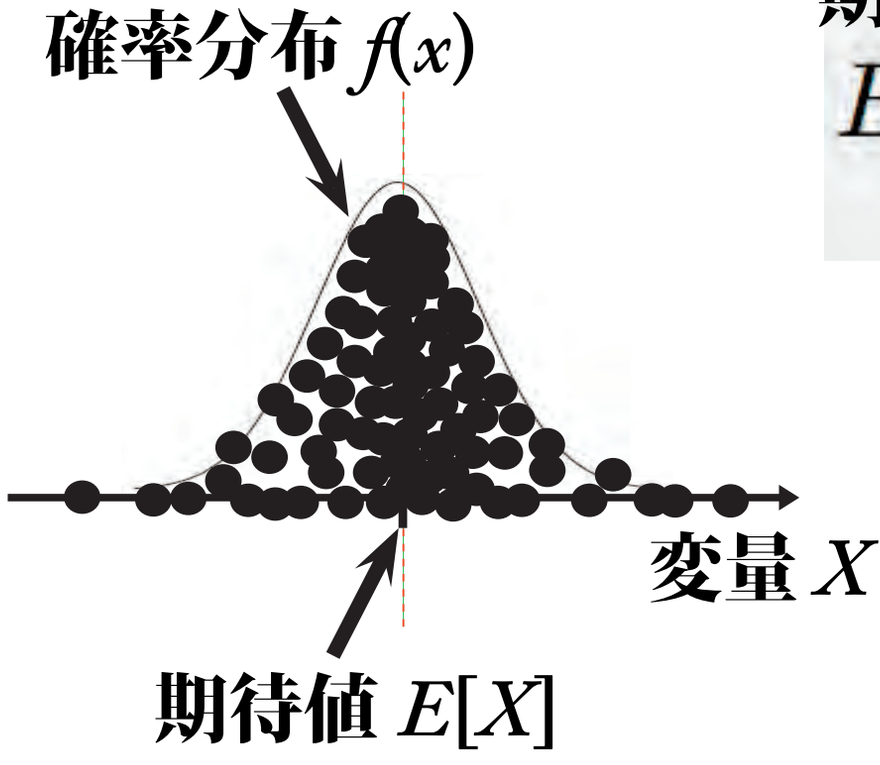
偏差の自由度は「$3 - 1 = 2$」となる.

「分散」を定義する

平方和を構成する n 個の偏差の自由度は (n − 1) だから，
平方和もまた (n − 1) の自由度をもつことになる．

分散＝平方和 / 自由度

確率分布と「分散」の関係



期待値

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

変量 X の値

期待値演算子 $E[.]$

確率分布と「分散」の関係

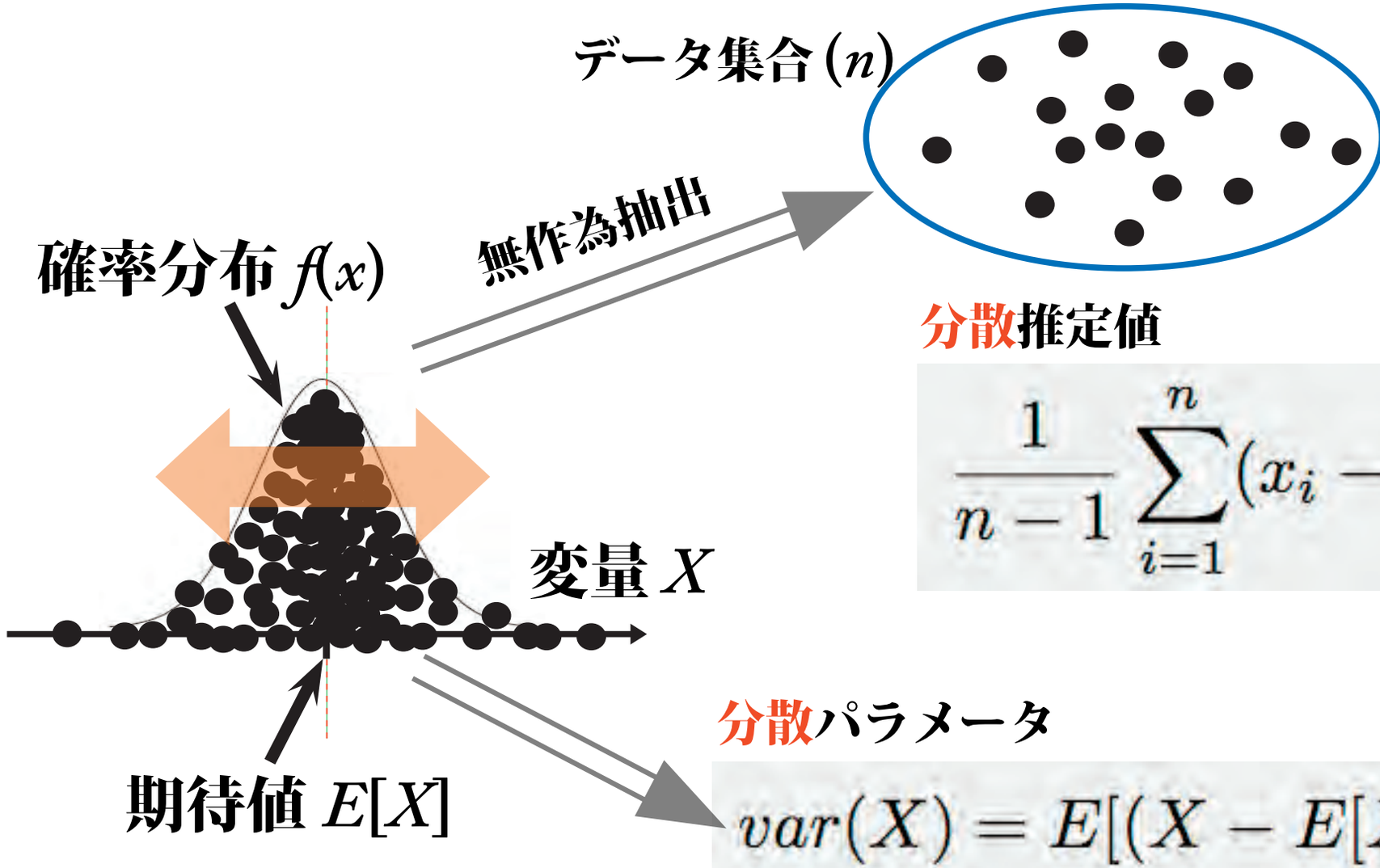
ある変量 X の確率分布の密度関数が $f(x)$ で与えられ，その期待値を $E[X]$ とするとき，X の「分散」$var(X)$ は：

$$var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f(x) dx$$

ただし，

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

「分散」パラメータとその推定値



分散推定値

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

分散パラメータ

$$var(X)=E[(X-E[X])^2]$$

正規分布

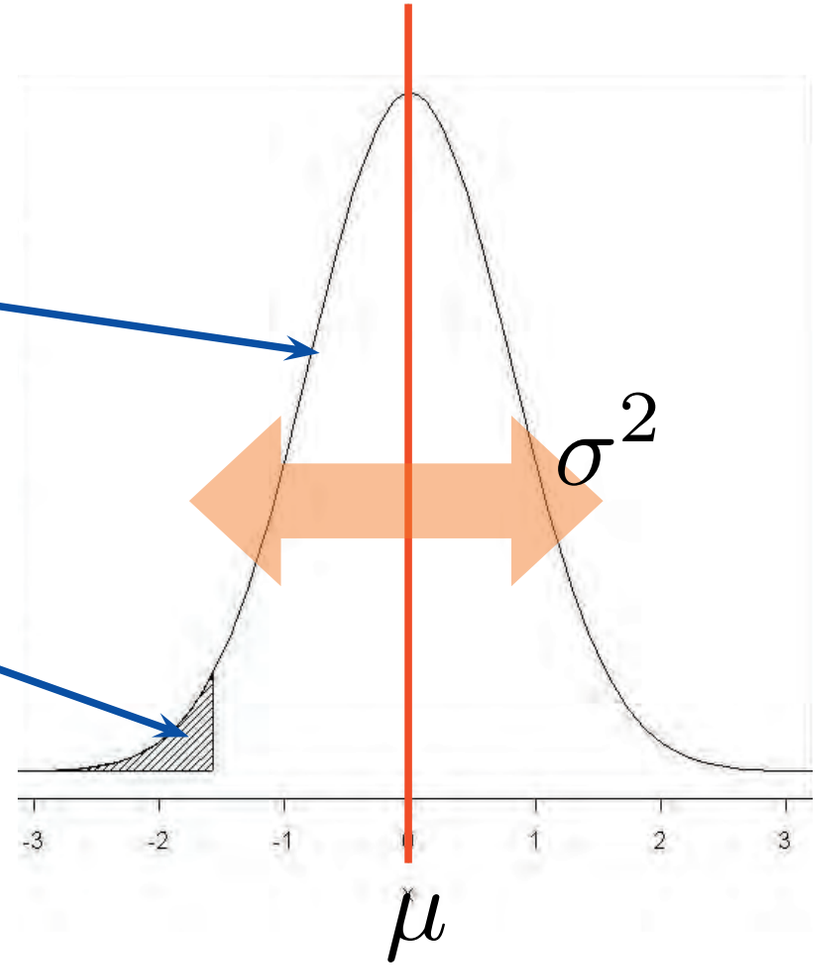
平均μ，分散σ^2の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$の確率密度関数

確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

累積確率関数

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$



正規分布

線形変換における正規性の保存

1) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき, $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

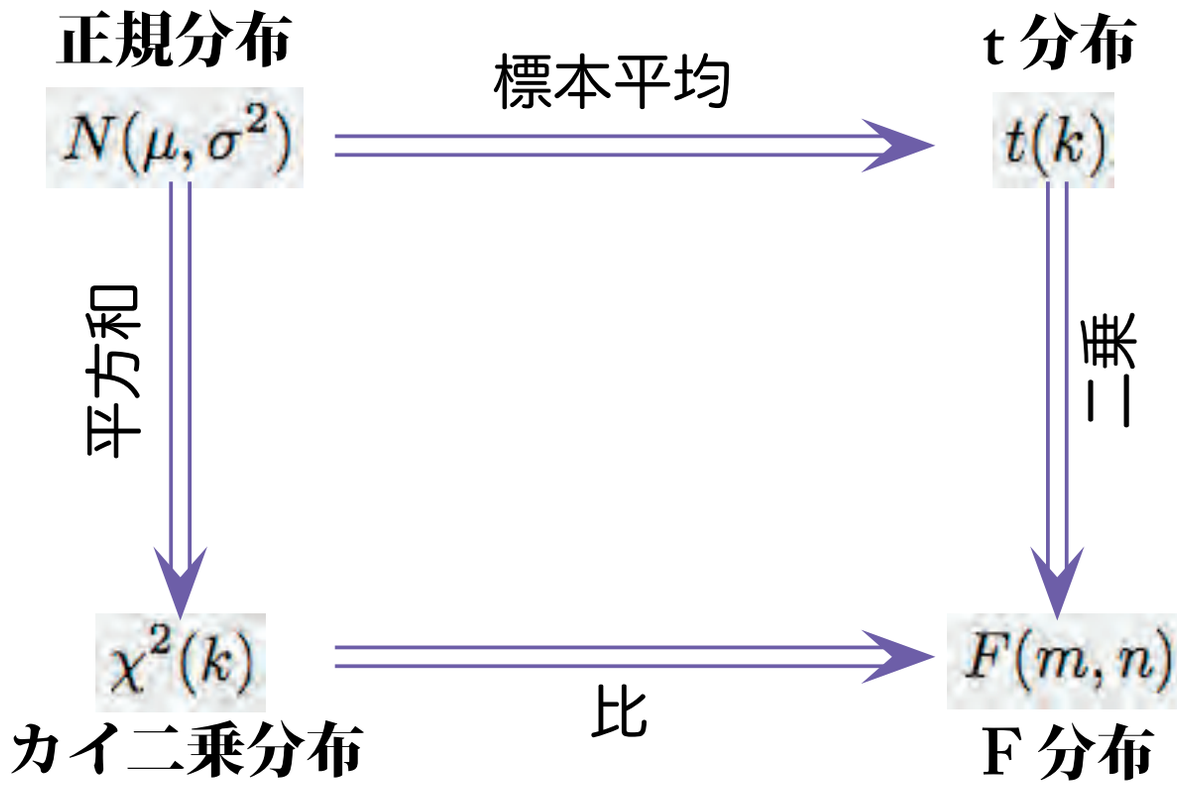
とくに, $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ を標準正規分布と呼ぶ.

2) $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)(i = 1, 2, \ldots, n)$ のとき,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, a_i^2 \sigma_i^2)$$

正規分布

関連する他の確率分布の導出



正規分布

関連する他の確率分布の導出

カイ二乗分布

$$\chi^2(k) = \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$$

t 分布

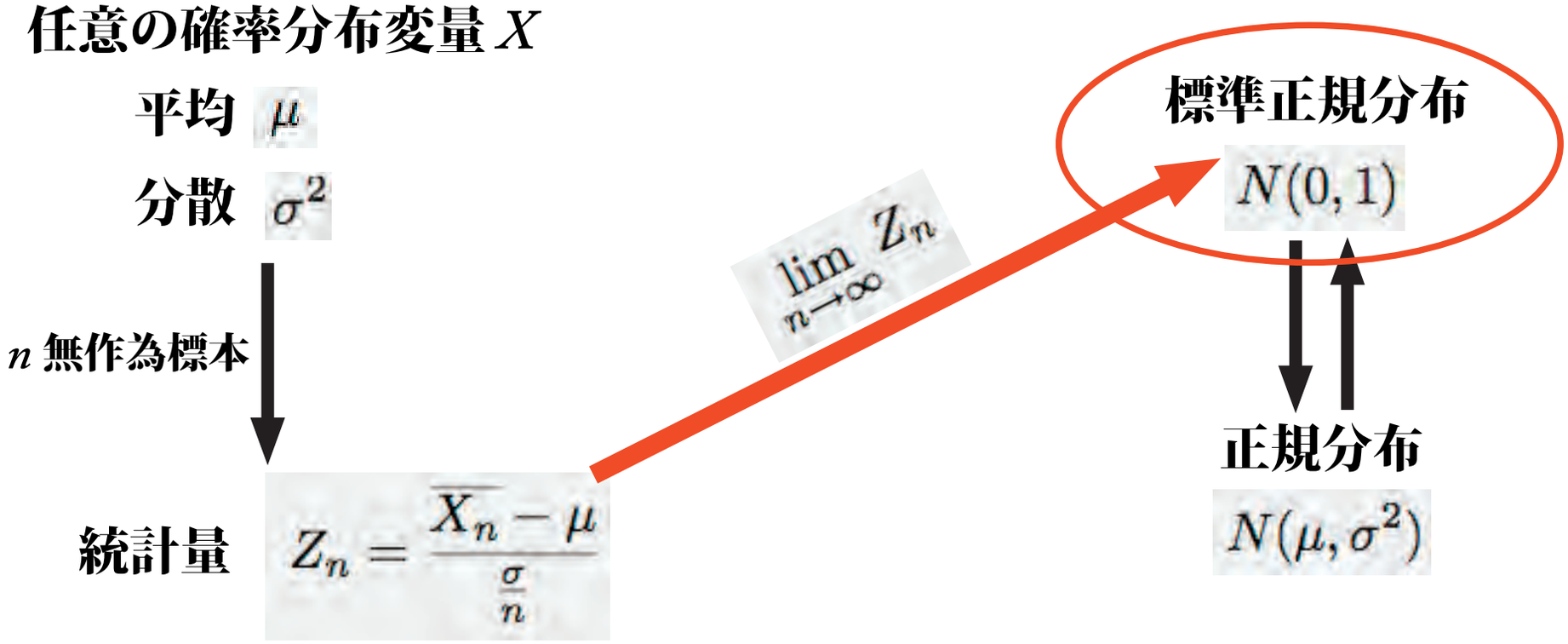
$$t(k) = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{\frac{k+1}{2}}}$$

F 分布

$$F(m,n) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\frac{x^{\frac{m-2}{2}}}{[1+(\frac{m}{n})x]^{\frac{m+n}{2}}}$$

正規分布

「中心極限定理」


任意の確率分布変量 X
平均 μ
分散 σ^2
n 無作為標本
統計量 $Z_n = \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{\frac{\sigma}{n}}$
$\lim_{n\to\infty} Z_n$
標準正規分布
$N(0,1)$
正規分布
$N(\mu, \sigma^2)$