「分散」パラメータとその推定値

【命題】分散推定値の期待値は分散パラメータに等しい：

$$E[S^2] = \sigma^2$$

ただし，

$$\mu = E[X]$$

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

「分散」パラメータとその推定値

期待値演算子の基本的性質

$$X \sim f(x), X_1, X_2, \ldots, X_n \sim f(x)$$
$$\mu = E[X], \sigma^2 = var[X] = E[(X-\mu)^2]$$ とするとき：

$$1) E[aX+b] = a\mu + b, var[aX+b] = a^2\sigma^2$$

$$2) E[\sum_1^n X_i] = n\mu, var[\sum_1^n X_i] = n\sigma^2$$

$$3) E[\overline{X}] = \mu, var[\overline{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$$

「分散」パラメータとその推定値

母平均μに関する標本の偏差を標本平均によって分割：

$$
\begin{aligned}
\sum_{1}^{n}(X_i-\mu)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\{(X_i-\overline{X})+(\overline{X}-\mu)\}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}-\mu)^2+2(\overline{X}-\mu)\underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})}}_{0} \\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}-\mu)^2
\end{aligned}
$$

「分散」パラメータとその推定値

標本平均に関する標本偏差の期待値を計算する：

$$E[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2] = E[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2] - E[\sum_{i=1}^{n}(\overline{X} - \mu)^2]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \boxed{E[(X_i - \mu)^2]} - n\boxed{E[(\overline{X} - \mu)^2]}$$

$$= n\boxed{\sigma^2} - n \times \boxed{\frac{\sigma^2}{n}} = (n-1)\sigma^2$$

「分散」パラメータとその推定値

以上の結果から，分散推定値の期待値は次のとおり：

$$
\begin{aligned}
E[S^2] &= E[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}] \\
&= \frac{1}{n-1} \times E[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2] \\
&= \frac{1}{n-1} \times (n-1)\sigma^2 = \sigma^2
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad E[S^2] = \sigma^2$ **証明終**