

生物統計学

— データに基づく「よりよい推論」のために —

三中信宏

MINAKA Nobuhiro

独立行政法人 農業環境技術研究所 生態系計測研究領域 上席研究員
東京大学大学院 農学生命科学研究科 生物・環境工学専攻 教授 [生態系計測学]
東京農業大学大学院 農学研究科 客員教授 [応用昆虫学]

minaka@affrc.go.jp (メール)

<http://twitter.com/leeswijzer> (ツイッター)

<http://cse.niaes.affrc.go.jp/minaka/> (ウェブサイト)

<http://d.hatena.ne.jp/leeswijzer/> (書評ブログ)

多変量同時確率分布

共分散を直感的に理解する

偏差が「正の共変動」をするとき：

$$X_i - E[X_i]$$

偏差の符号
+ -

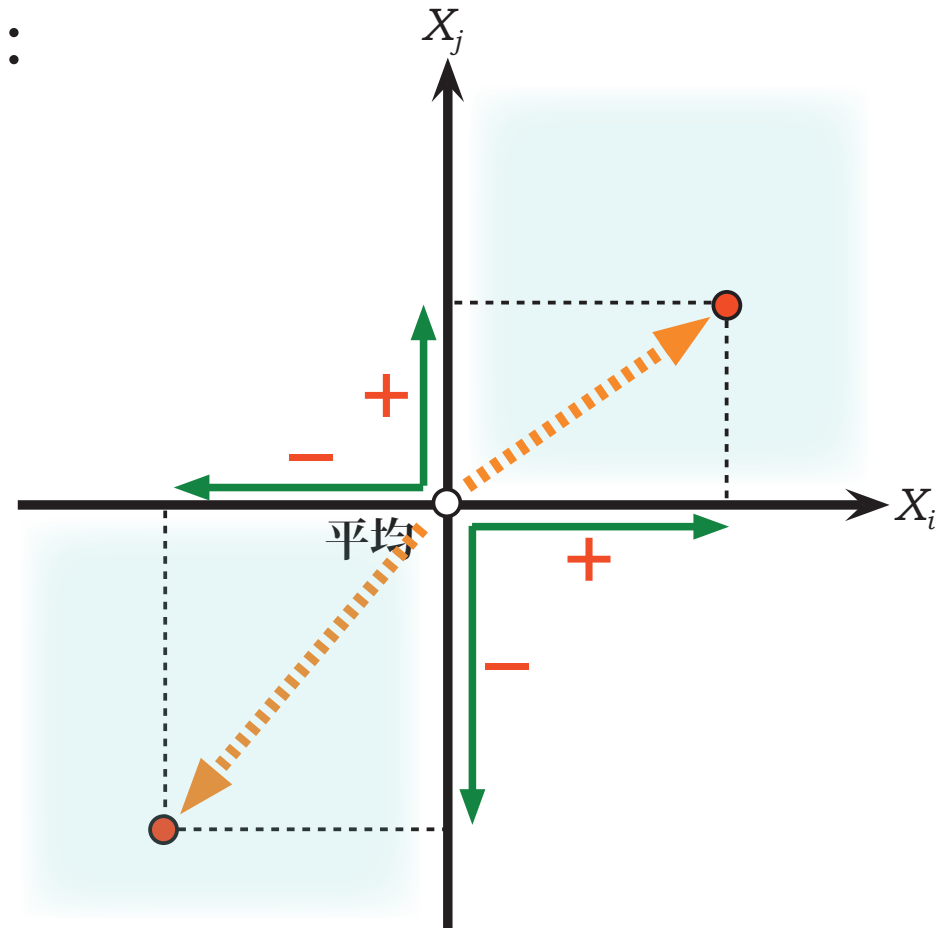
$$X_j - E[X_j]$$

+ -



$$(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])$$

は「正」の値になる.



多変量同時確率分布

共分散を直感的に理解する

偏差が「負の共変動」をするとき：

$$X_i - E[X_i]$$

偏差の符号
+ -

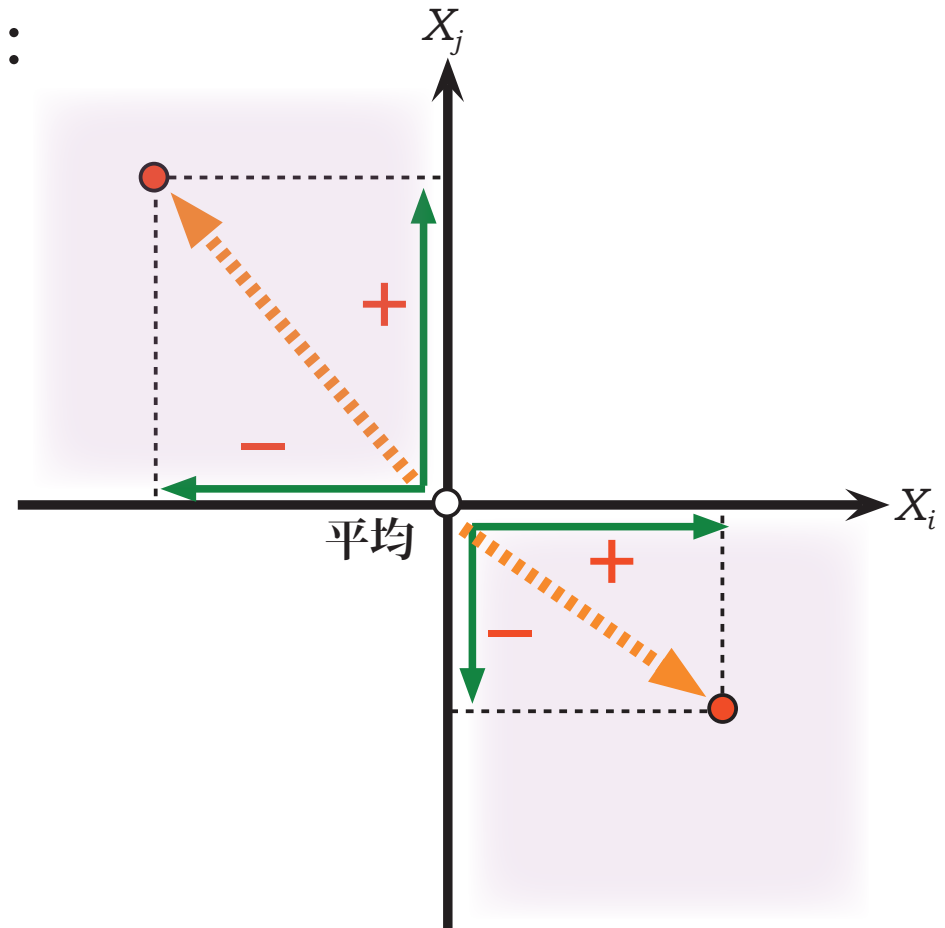
$$X_j - E[X_j]$$

- +



$$(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])$$

は「負」の値になる.



多変量同時確率分布

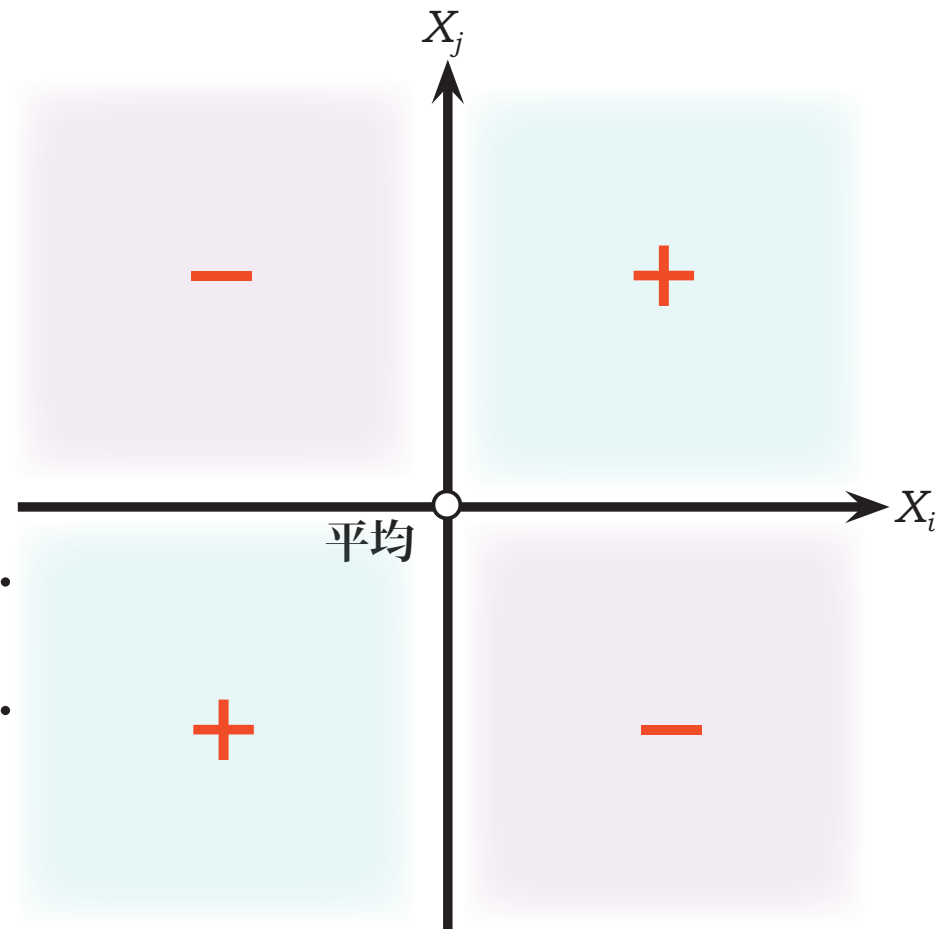
共分散を直感的に理解する

変量のペアの偏差積：

$$(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])$$

の符号は、

- 1) 第一，第三象限で「正」になる.
- 2) 第二，第四象限で「負」になる.



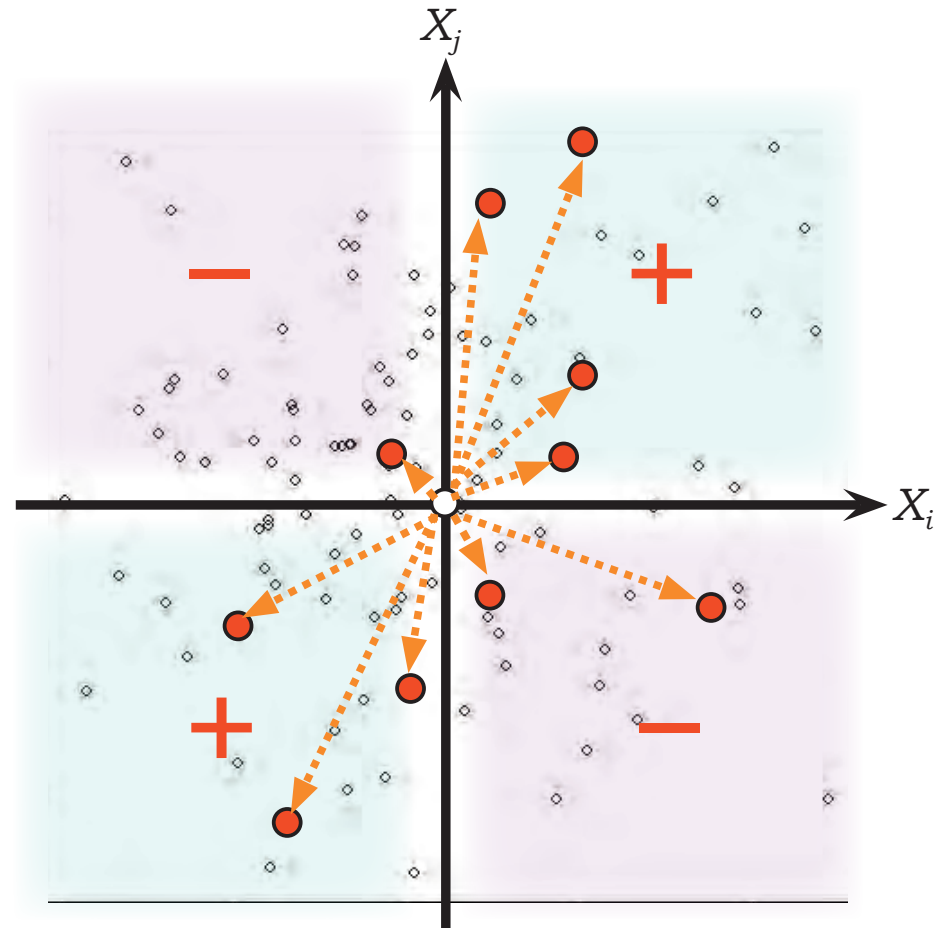
多変量同時確率分布

共分散を直感的に理解する

偏差積の期待値である共分散：

$$E[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])]$$

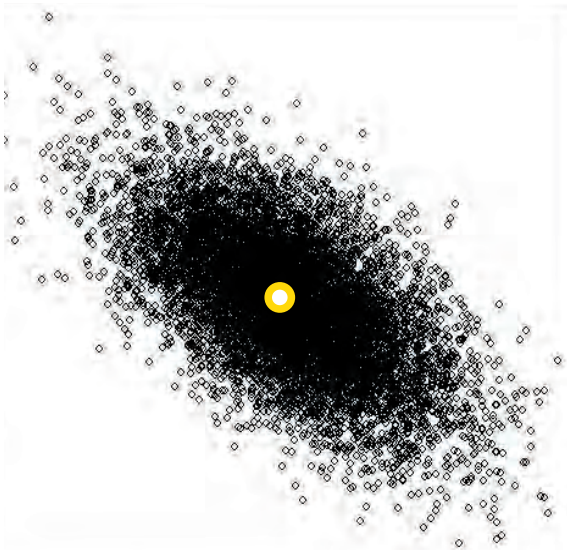
の値によって、二変量の間
の共変動のパターンが明らか
になる。



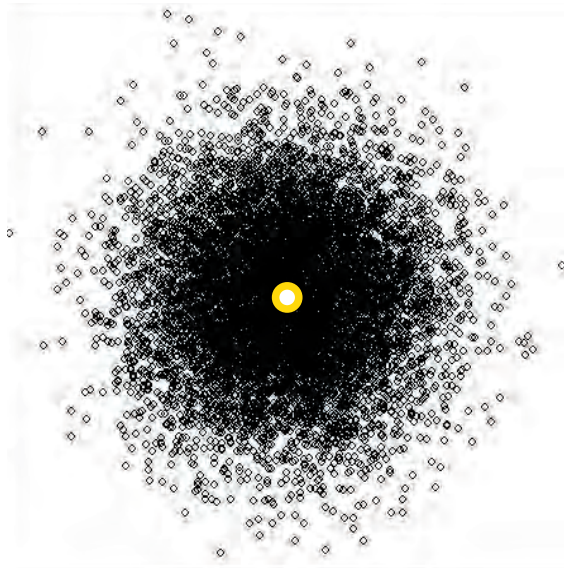
多変量同時確率分布

共分散を直感的に理解する

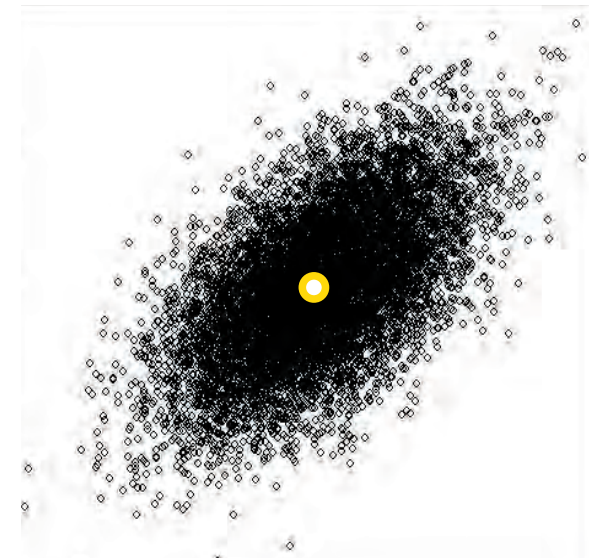
共分散が「負」



共分散が「0」



共分散が「正」



多変量同時確率分布

変量間の共分散とは何か

変量の分散 (variance) と共分散 (covariance) は、いずれも平均からの偏差 (deviation) に関する期待値を計算している。

- 1) 「分散」はある変量の「偏差平方」の期待値であり、平均値からの偏差の大きさすなわち変動のパラメータである。
- 2) 「共分散」は変量間の「偏差積」の期待値であり、変量間での偏差の連動の程度すなわち共変動のパラメータである。

多変量同時確率分布

変量間の共分散とは何か

分散共分散行列の第 (i, j) 要素

$$E[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])] = \begin{cases} \text{var}[X_i] & (i = j) \\ \text{cov}[X_i, X_j] & (i \neq j) \end{cases}$$

分散

対角要素

偏差

各変量の値がその期待値
(平均) からどれくらい離れ
ているか

共分散

非対角要素

多変量同時確率分布

共分散から相関係数へ

共分散の値は、変量それ自身がもっているばらつきの程度（分散）の影響を受ける。異なる変量ペア間での共変動を相互比較するために、共分散を分散によって補正し、相関係数（correlation coefficient）を次式のように定義する。

相関係数

$$\rho = \frac{\text{cov}[X_i, X_j]}{\sqrt{\text{var}[X_i]}\sqrt{\text{var}[X_j]}}$$

相関係数は $-1 \leq \rho \leq +1$ の範囲の値を取る。

多変量同時確率分布

二変量正規分布の確率密度関数

変量ベクトル

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

平均ベクトル

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

分散共分散行列

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \text{var}[X_1] & \text{cov}[X_1, X_2] \\ \text{cov}[X_2, X_1] & \text{var}[X_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

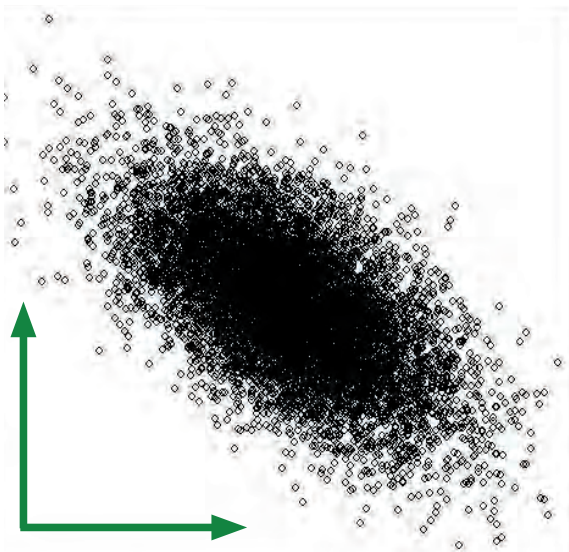
多変量同時確率分布

二変量正規分布の確率密度関数

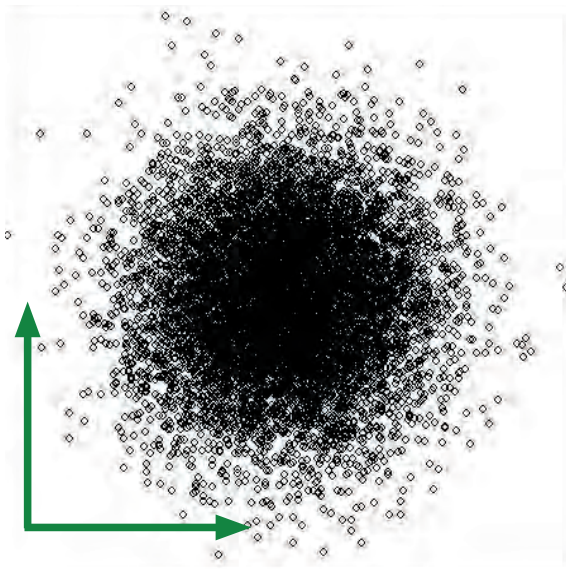
確率密度関数

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{1-\rho^2} \left\{ \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right\} \right]$$

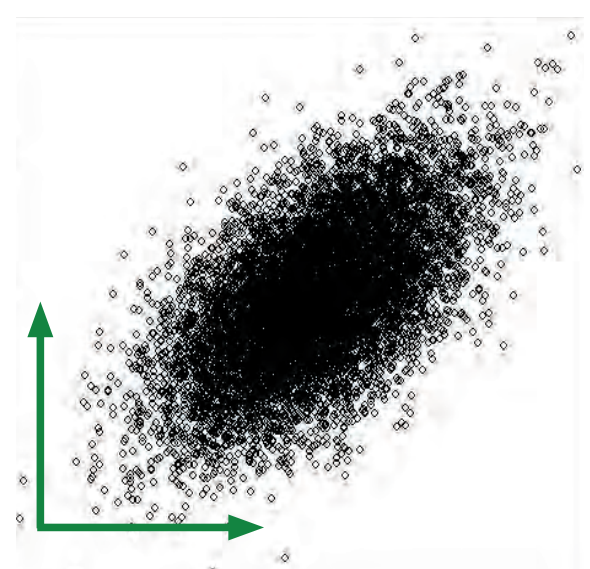
相関係数 ρ の正負によって、変量間の共変動パターンが変化する。



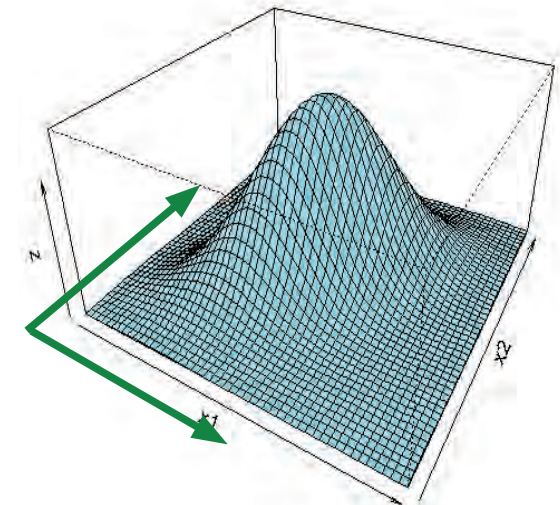
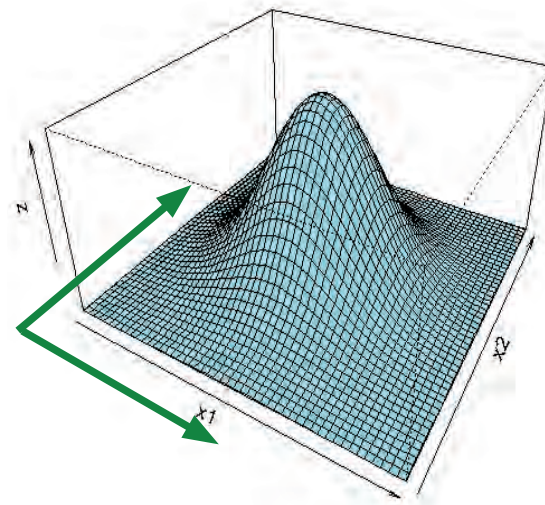
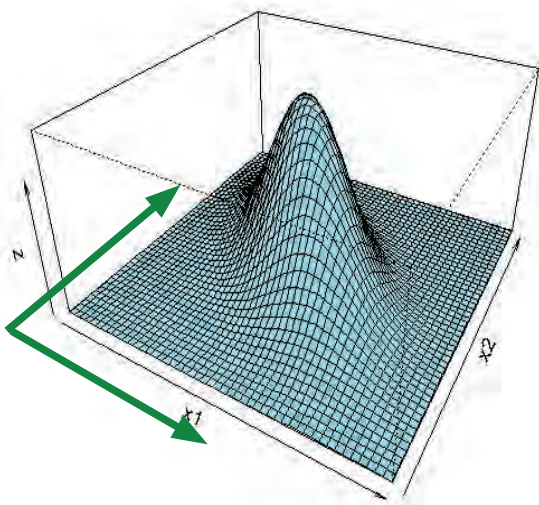
$\rho < 0$



$\rho = 0$



$\rho > 0$



多変量同時確率分布

一変量から多変量へ

1 変量正規分布

分散 (標準偏差) 平均

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

変量

p 変量正規分布

分散共分散行列 平均ベクトル

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^p \sqrt{|\Sigma|}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{X} - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \mu) \right]$$

変量ベクトル

多変量同時確率分布

多変量正規分布をよく見ると

p 変量正規分布

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^p} \sqrt{|\Sigma|}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \right]$$

変量ベクトル : p 次元の列ベクトル

平均ベクトル : p 次元の列ベクトル

分散共分散行列 : $p \times p$ 型の対称行列

多変量を「ベクトル・行列」で記述する

変量ベクトル

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$$

平均ベクトル

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ \vdots \\ E[X_p] \end{pmatrix}$$

分布位置
を示すパ
ラメータ

ばらつき
を示すパ
ラメータ

分散共分散行列

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \text{var}[X_1] & \text{cov}[X_1, X_2] & \dots & \text{cov}[X_1, X_p] \\ \text{cov}[X_2, X_1] & \text{var}[X_2] & \dots & \text{cov}[X_2, X_p] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cov}[X_p, X_1] & \text{cov}[X_p, X_2] & \dots & \text{var}[X_p] \end{pmatrix}$$

多変量同時確率分布

変量間の共分散とは何か

分散共分散行列

